МИНИСТЕРСВО ОБРАЗОВАНИЯ СТАВРОПОЛЬСКОГО КРАЯ
государственное бюджетное профессиональное образовательное учреждение
«Ставропольский строительный техникум»

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ ПРАКТИЧЕСКОЙ РАБОТЫ

по дисциплине

ЕН.01 МАТЕМАТИКА

для специальности

08.02.07 Монтаж и эксплуатация внутренних сантехнических устройств кондиционирования воздуха и вентиляции

Ставрополь, 2021

РАССМОТРЕНО
на заседании цикловой комиссии
«естественно-математических
дисциплин»
Протокол № 10
от 18.05.2021 г.
Председатель цикловой комиссии
__________ Н.Б. Берлова

РЕКОМЕНДОВАНО
Методическим советом
ГБПОУ ССТ
Протокол № 10
25.05.2021 г.

СОГЛАСОВАНО
Л.В. Белоусова,
Заместитель директора по УМРК
от 18.05.2021 г.
____

РЕЦЕНЗЕНТ
Л.В. Печалова, к.и.н., методист
Центра менеджмента качества и методической работы техникума
18.05.2021 г.
____

Разработчик:
Н.А. Ваганова, преподаватель математики
18.05.2021 г.
____

Содержание **стр.**

Критерии оценки практической работы.
При оценке письменных и устных ответов преподаватель в первую очередь учитывает показанные студентами знания и умения. Оценка зависит также от наличия и характера погрешностей, допущенных студентами. Среди погрешностей выделяются ошибки и недочеты.
Погрешность считается ошибкой, если она свидетельствует о том, что студент не овладел основными знаниями, умениями, указанными в программе.
К недочетам относятся погрешности, свидетельствующие о недостаточно полном или недостаточно прочном усвоении основных знаний и умений или об отсутствии знаний, не считающихся в программе основными. Недочетами также считаются: погрешности, которые не привели к искажению смысла полученного студентом задания или способа его выполнения; неаккуратная запись; небрежное выполнение чертежа или графика.
к грубым ошибкам относятся:
-незнание учащимися формул, правил, основных свойств ;
-незнание определения основных понятий, законов, правил, основных положений теории,
- теорем и неумение их применять;
-незнание приемов решения задач, неумение читать и строить графики;
- вычислительные ошибки, если они не являются опиской; равнозначные им ошибки;
- логические ошибки;
-незнание приемов решения типовых задач;
к негрубым ошибкам относятся:
- неточность формулировок, определений, понятий, теорий, вызванная неполнотой охвата основных признаков определяемого понятия или заменой одного - двух из этих признаков второстепенными;
- неточность графика;
- нерациональный метод решения задачи,;
-выполнение чертежей и графиков без применения чертежных принадлежностей;

При оценивании практической работы также учитывается объем правильно выполненных заданий:

Процент результативности (правильных ответов)	Оценка уровня подготовки	
	балл (отметка)	вербальный аналог
90 ÷ 100	5	отлично
80 ÷ 89	4	хорошо
70 ÷ 79	3	удовлетворительно
менее 70	2	неудовлетворительно

Оценка «отлично» ставится, если:
-работа выполнена полностью и получен верный ответ или иное требуемое представление результата работы;
-правильно выполнено 90-100% работы.
-чертежи графики выполнены с использованием чертежных принадлежностей;
Оценка «хорошо» ставится, если:
-работа выполнена полностью, но при выполнении обнаружилось недостаточное владение навыками работы в рамках поставленной задачи;
-правильно выполнена большая часть работы (80-89%);

-работа выполнена полностью, но использованы наименее оптимальные подходы к решению поставленной задачи.
- допущены ошибки или более двух недочетов при освещении второстепенных вопросов или в выкладках.

Оценка «удовлетворительно» ставится, если:

-работа выполнена не полностью (70 ÷ 79%), допущено более трех ошибок, но обучающиеся владеет основными навыками работы, требуемыми для решения поставленной задачи.

Оценка «неудовлетворительно» ставится, если:

- работа выполнена не полностью (менее 70%)

-допущены существенные ошибки, показавшие, что обучающиеся не владеет обязательными знаниями, умениями и навыками работы.
-работа показала полное отсутствие у учащихся обязательных знаний и навыков работы по проверяемой теме.

Практическая работа №1

Вычисление определителей высших порядков.

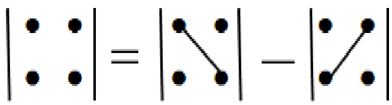
Краткая теория

Определение. Квадратной матрице A порядка n можно сопоставить число $\det A$ (или $|A|$, или Δ), называемое ее определителем, следующим образом:

1. $n = 1$, $A = (a_1)$; $\det A = a_1$.
2. $n = 2$, $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$; $\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$.
3. $n = 3$, $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$;

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} -$$
$$- a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33} - a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32}$$

Вычисление определителя 2-го порядка иллюстрируется схемой:

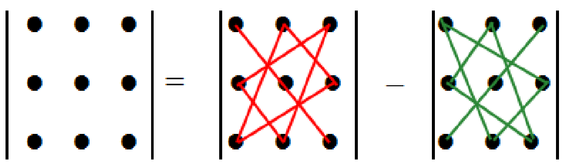


Пример. Найти определители матриц $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$.

Решение: $\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = 2 \cdot 6 - 5 \cdot (-3) = 27$

$\begin{vmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix} = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$

При вычислении определителя 3-го порядка удобно пользоваться **правилом треугольников** (или Саррюса), которое символически можно записать так:



Пример. Вычислить определитель матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & -4 \\ 6 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Решение:

$$\det A = \begin{vmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & -4 \\ 6 & 0 & -3 \end{vmatrix} = 5\cdot1\cdot(-3) + (-2)\cdot(-4)\cdot6 + 3\cdot0\cdot1 - 1\cdot1\cdot6 - 3\cdot(-2)\cdot(-3) -$$

$5\cdot0\cdot(-4) =$
$= -15 + 48 - 6 - 18 = 48 - 39 = 9.$

Инструкция

1. Внимательно прочитайте задания и выполните их в приведенной последовательности согласно своему варианту.
2. Максимальное время выполнения задания – 70 мин.

Задание 1

Вычислите определители третьего порядка

$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 1 & 3 & 16 \\ 0 & -1 & 10 \end{vmatrix}$; $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & -2 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix}$

Задание 2 Вычислите определить

а) второго порядка

1. $\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & -4 \end{vmatrix}$. 2. $\begin{vmatrix} 6 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$ 3. $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}$ 4. $\begin{vmatrix} -6 & 0 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}$ 5. $\begin{vmatrix} 8 & 9 \\ 1 & -4 \end{vmatrix}$

6. $\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ -5 & 2 \end{vmatrix}$ 7. $\begin{vmatrix} 2 & 9 \\ -3 & 4 \end{vmatrix}$ 8 $\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 10 & 5 \end{vmatrix}$ 9. $\begin{vmatrix} 1 & 10 \\ -1 & -5 \end{vmatrix}$ 3. $\begin{vmatrix} 10 & 20 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$

.

б) третьего порядка

1. $\begin{vmatrix} 1 & 8 & -3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -6 & -1 \end{vmatrix}$ 2. $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 9 & -1 \end{vmatrix}$ 3. $\begin{vmatrix} 1 & 8 & 5 \\ 1 & -2 & 5 \\ 1 & -6 & 1 \end{vmatrix}$ 4. $\begin{vmatrix} 2 & 8 & -3 \\ 0 & -8 & 1 \\ 5 & -6 & -1 \end{vmatrix}$ 5. $\begin{vmatrix} 1 & 8 & -3 \\ 6 & 0 & -3 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix}$

6. $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -2 \end{vmatrix}$ 7. $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 2 & 0 & 9 \end{vmatrix}$ 8. $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 4 \end{vmatrix}$ 9. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 1 & 1 & 4 \\ 0 & 8 & -2 \end{vmatrix}$ 10. $\begin{vmatrix} 4 & -2 & 1 \\ -2 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 2 \end{vmatrix}$

Практическая работа №2

Решение систем линейных уравнений по видам профессиональной деятельности

Краткая теория

Решение систем линейных уравнений методом Гаусса.

Пусть нам требуется найти решение системы из n линейных уравнений с n неизвестными переменными определитель основной матрицы которой отличен от нуля.

Суть метода Гаусса состоит в последовательном исключении неизвестных переменных: сначала исключается x_1 из всех уравнений системы, начиная со второго, далее исключается x_2 из всех уравнений, начиная с третьего, и так далее, пока в последнем уравнении останется только неизвестная переменная x_n. Такой процесс преобразования уравнений системы для последовательного исключения неизвестных переменных называется **прямым ходом метода Гаусса**. После завершения прямого хода метода Гаусса из последнего уравнения находится x_n, с помощью этого значения из предпоследнего уравнения вычисляется x_{n-1}, и так далее, из первого уравнения находится x_1. Процесс вычисления неизвестных переменных при движении от последнего уравнения системы к первому называется **обратным ходом метода Гаусса**.

Кратко опишем алгоритм исключения неизвестных переменных.

Решить систему линейных уравнений методом Гаусса

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 - x_3 = 1 \\ 5x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 2 \\ 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0 \end{cases}$$

Запишем расширенную матрицу системы и с помощью элементарных преобразований приведем ее к ступенчатому виду:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & -1 & 1 \\ 5 & 3 & -2 & 2 \\ 3 & 2 & -3 & 0 \end{array}\right)$$

Смотрим на левую верхнюю «ступеньку». Там у нас должна быть единица. Проблема состоит в том, что в первом столбце единиц нет вообще, поэтому перестановкой строк ничего не решить. В таких случаях единицу нужно организовать с помощью элементарного преобразования. Обычно это можно сделать несколькими способами. Я поступил так:

(1) **К первой строке прибавляем вторую строку, умноженную на –1**. То есть, мысленно умножили вторую строку на –1 и выполнили сложение первой и второй строки, при этом вторая строка у нас не изменилась.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & -1 & 1 \\ 5 & 3 & -2 & 2 \\ 3 & 2 & -3 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{(1)} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 1 & -1 \\ 5 & 3 & -2 & 2 \\ 3 & 2 & -3 & 0 \end{array}\right)$$

Теперь слева вверху «минус один», что нас вполне устроит. Кто хочет получить +1, может выполнить дополнительное телодвижение: умножить первую строку на –1 (сменить у неё знак).

Дальше алгоритм работает уже по накатанной колее:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & -1 & 1 \\ 5 & 3 & -2 & 2 \\ 3 & 2 & -3 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{(1)} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 1 & -1 \\ 5 & 3 & -2 & 2 \\ 3 & 2 & -3 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{(2)} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 3 & -3 \\ 0 & -1 & 0 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow{(3)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & 3 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow{(4)}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{(5)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

(2) Ко второй строке прибавили первую строку, умноженную на 5. К третьей строке прибавили первую строку, умноженную на 3.

(3) Первую строку умножили на –1, в принципе, это для красоты. У третьей строки также сменили знак и переставили её на второе место, таким образом, на второй «ступеньке у нас появилась нужная единица.

(4) К третьей строке прибавили вторую строку, умноженную на 2.

(5) Третью строку разделили на 3.

Скверным признаком, который свидетельствует об ошибке в вычислениях (реже – об опечатке), является «плохая» нижняя строка. То есть, если бы у нас внизу получилось что-нибудь вроде $\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 11 & 23 \end{array}\right)$, и, соответственно, $11x_3 = 23 \Rightarrow x_3 = \frac{23}{11}$, то с большой долей вероятности можно утверждать, что допущена ошибка в ходе элементарных преобразований.

Заряжаем обратный ход, в оформлении примеров часто не переписывают саму систему, а уравнения «берут прямо из приведенной матрицы». Обратный ход, напоминаю, работает, снизу вверх. Да тут подарок получился:

$x_3 = 1$

$x_2 = 3$

$x_1 + x_2 - x_3 = 1 \Rightarrow x_1 + 3 - 1 = 1 \Rightarrow x_1 = -1$

Ответ: $x_1 = -1, x_2 = 3, x_3 = 1$.

Правило Крамера

Правило (метод) Крамера применяется к системам, у которых <u>число уравнений равно числу неизвестных. Этот метод использует определители.</u>

Рассмотрим систему 3-х линейных уравнений с тремя неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3, \end{cases}$$

В которой определитель системы (он составлен из коэффициентов при неизвестных) Δ≠0, а определители $\Delta_{x_1}, \Delta_{x_2}, \Delta_{x_3}$ получаются из определителя системы Δ посредством замены свободными членами элементов соответственно первого, второго и третьего столбцов.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{32} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{32} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{32} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \ \Delta_{x_3} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

Теорема (правило Крамера). Если определитель системы Δ≠0, то рассматриваемая система (1) имеет одно и только одно решение, причём

$$x_1 = \frac{\Delta_{x_1}}{\Delta}, \ x_2 = \frac{\Delta_{x_2}}{\Delta}, \ x_3 = \frac{\Delta_{x_3}}{\Delta}.$$

Таким образом, если определитель системы Δ ≠ 0, то система имеет единственное решение и обратно. Если же определитель системы равен нулю, то система либо имеет бесконечное множество решений, либо не имеет решений, т.е. несовместна.

Случай 1. Определитель системы не равен нулю: $\Delta \neq 0$, $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$, тогда система имеет единственное решение.

Случай 2. Определитель системы равен нулю: $\Delta = 0$ (т.е. коэффициенты при неизвестных пропорциональны). Пусть при этом один из определителей Δ_x, Δ_y не равен нулю (т. е свободные члены не пропорциональны коэффициентам при неизвестных). $\Delta = 0$ и $\Delta_x \neq 0$ или $\Delta_y \neq 0$, т.е. $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$. В этом случае система не имеет решений.

Случай 3. $\Delta = 0,\ \Delta x_x = 0,\ \Delta_y y = 0$ (т. е. и коэффициенты и свободные члены пропорциональны $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$), если одно из уравнений, есть следствие другого; система сводится к одному уравнению с двумя неизвестными и имеет бесчисленное множество решений.

Пример. Решить систему уравнений $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 9, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + 2x_3 = 2. \end{cases}$

Решение:

1. Вычислим определитель системы:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-2) \cdot 2 + 3 \cdot 1 \cdot 1 + (-1) \cdot 1 \cdot 0 - (-1) \cdot (-2) \cdot 1 - 3 \cdot 1 \cdot 2 - 2 \cdot 1 \cdot 0 = -13.$$

Так как определитель системы отличен от нуля, то система имеет единственное решение, которое может быть найдено методом Крамера.

2. Составим и вычислим необходимые определители :

$$\Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} 9 & 3 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 9\cdot(-2)\cdot 2 + 3\cdot 1\cdot 2 + (-1)\cdot 3\cdot 0 - (-1)\cdot(-2)\cdot 2 - 3\cdot 3\cdot 2 - 9\cdot 1\cdot 0 = -52$$

$$\Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} 2 & 9 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 2\cdot 3\cdot 2 + 9\cdot 1\cdot 1 + (-1)\cdot 1\cdot 2 - (-1)\cdot 3\cdot 1 - 9\cdot 1\cdot 2 - 2\cdot 1\cdot 2 = 0$$

$$\Delta_{x_3} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 9 \\ 1 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2\cdot(-2)\cdot 2 + 3\cdot 3\cdot 1 + 9\cdot 1\cdot 0 - 9\cdot(-2)\cdot 1 - 3\cdot 1\cdot 2 - 2\cdot 3\cdot 0 = 13$$

3. Находим неизвестные по формулам Крамера:

$$x_1 = \frac{\Delta_{x_1}}{\Delta},\ x_2 = \frac{\Delta_{x_2}}{\Delta},\ x_3 = \frac{\Delta_{x_3}}{\Delta}$$

$$x_1 = \frac{\Delta_{x_1}}{\Delta} = \frac{-52}{-13} = 4,$$

$$x_2 = \frac{\Delta_{x_2}}{\Delta} = \frac{0}{-13} = 0,$$

$$x_3 = \frac{\Delta_{x_3}}{\Delta} = \frac{13}{-13} = -1.$$

Ответ: $x_1 = 4,\ x_2 = 0,\ x_3 = -1.$

Инструкция

1. Внимательно прочитайте задания и выполните их в приведенной последовательности согласно своему варианту.
2. Максимальное время выполнения задания – 80 мин.

ВАРИАНТ 1

Решите системы линейных уравнений методом Гаусса:

$$\begin{cases} x+2y+z=5 \\ -x+3y-2z=3 \\ -x-7y+4z=-5 \end{cases} \begin{cases} x+2y+z=5 \\ 5y-z=8 \\ -5y+5z=0 \end{cases} \begin{cases} x+2y+z=5 \\ 5y-z=8 \\ 4z=8 \end{cases}$$

б ¿ $\begin{cases} x+2y-z=2 \\ 2x-y+z=3 \\ 3x+4y-5z=-4 \end{cases}$. в) $\begin{cases} x+2y-z=4 \\ 2x+y-2z=-4 \\ 3x-3y+z=0 \end{cases}$

Решите систему уравнений по формулам Крамера

$$\begin{cases} 5x+y-3z=-2; \\ 4x+3y+2z=16; \\ 2x-3y+z=17. \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x - y + 2z = -3; \\ x + 2y - z = 4; \\ 3x + y + 3z = 3. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 5; \\ 2x - y - z = 1; \\ x + 3y + 4z = 6. \end{cases}$$

ВАРИАНТ 2

Решите системы линейных уравнений методом Гаусса:

а) $\begin{cases} x + y - 2z = 6 \\ 2x + 3y - 7z = 16 \\ 5x + 2y + z = 16 \end{cases}$ $\begin{cases} x + y - 2z = 6 \\ y - 3z = 4 \\ -3y + 11z = -14 \end{cases}$ $\begin{cases} x + y - 2z = 6 \\ y - 3z = 4 \\ 2z = -2 \end{cases}$

б ¿ $\begin{cases} 2x + 2y - z = 0 \\ x - 2y + 3z = 7 \\ 4x + y - 4z = 6 \end{cases}$ в) $\begin{cases} x + 2y - z = 2 \\ 2x + y - 2z = -5 \\ 3x - 3y + z = -1 \end{cases}$

Решите систему уравнений по формулам Крамера

$$\begin{cases} 3x - 2y + z = 10; \\ x + 5y - 2z = -15; \\ 2x - 2y - z = 3. \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x - 3y + z = -3; \\ x + 5y - z = -1; \\ 3x + y + 4z = 11. \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x - y + z = 2; \\ 3x + 2y + 2z = -2; \\ x - 2y + z = 1. \end{cases}$$

Практическая работа № 3
Нахождение производной функции

Краткая теория

Табличные значения производных элементарных функций, тригонометрических и обратных тригонометрических функций:

$c' = 0$ $(x^n)' = nx^{n-1}$ $(kx+b)' = k$ $(e^x)' = e^x$ $(a^x)' = a^x \ln a$ $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ $(\log_a x)' = \frac{1}{x\ln a}$	$(\sin x)' = \cos x$ $(\cos x)' = -\sin x$ $(tgx)' = \frac{1}{\cos^2 x}$ $(ctgx)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$	$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $(arctgx)' = \frac{1}{1+x^2}$ $(arcctgx)' = -\frac{1}{1+x^2}$

Правила вычисления производных:

$$1.\ (x \pm y)' = x' \pm y',$$

$$2.\ (xy)' = x'y + xy',$$

$$3.\ \left(\frac{x}{y}\right)' = \frac{x'y - xy'}{y^2}.$$

Пример 1.

Вычислите производную функции $f(x) = -2x^2 - \frac{1}{3}x^3 + 5x$.

Решение:

воспользуемся формулами и правилом 1 вычисления производных:

$$f'(x) = \left(-2x^2 - \frac{1}{3}x^3 + 5x\right)' = -2\cdot 2x^{2-1} - \frac{1}{3}\cdot 3x^{3-1} + 5\cdot 1x^{1-1} = -4x - x^2 + 5.$$

Пример 2.

Вычислите производную функции $f(x) = \sqrt{x}(x-3)$.

Решение:

воспользуемся формулами и правилом 2 вычисления производных:

$$f'(x) = \left(\sqrt{x}(x-3)\right)' = \left(\sqrt{x}\right)'(x-3) + \sqrt{x}(x-3)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}(x-3) + \sqrt{x}\cdot 1.$$

Приведем дроби к общему знаменателю:

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}(x-3) + \sqrt{x} = \frac{x-3+2x}{2\sqrt{x}} = \frac{3x-3}{2\sqrt{x}}.$$

Инструкция

1. Внимательно прочитайте задания и выполните их в приведенной последовательности согласно своему варианту.
2. Максимальное время выполнения задания – 90 мин.
Задания:
Вычислите производные функции:

$1) y` = (x^3 \cdot (x-4))`$

$2) y` = \left(\frac{1}{x^2} - 450x^3 + 220x\right)`$

$3) y` = (2 + 48\sqrt{x^4})`$

$4) y` = (2tgx + 4\cos x)`$

$5) y` = \left(\frac{5}{x} + 4x^2\right)'$

6) $y' = (4x^3 - \frac{x^2}{4} + 2x - 6\sqrt{x} + \sqrt{3})'$

7) $y' = (3\cos x - ctgx)'$

8) $y' = ((x^2 - 1)(x^4 + 2))'$

9) $y' = (\frac{x^3}{2x+1})'$

10) $y' = (\frac{2 - x^3}{x-1})'$

Контрольные вопросы:

1) Сформулируйте определение производной функции в точке.
2) Каков физический смысл производной?
3) Каков геометрический смысл производной?
4) Какая операция называется дифференцированием?
5) Какие известны правила дифференцирования?
6) Что называется дифференциалом функции?

Практическая работа № 4.
Дифференцирование сложных функций

Краткая теория

Производная сложной функции

Пусть функция $y = f(x)$, $x \in (a;b)$, имеет производную в точке $x_0 \in (a;b)$, а функция $z = f(x)$ имеет производную в точке $y_0 = g(x_0)$. Тогда сложная функция $z(x) = f(g(x))$ имеет производную в точке x_0, которая вычисляется по формуле:

$$z'(x_0) = (f(g(x_0))' = f'(y_0) \cdot g'(x_0).$$

Пример 70.

Вычислите производную функции $y = (x^2 + 3x + 10)^2$.

Решение:

представим заданную функцию как композицию квадратичной функции и степенной

$$y = (x^2 + 3x + 10)^2;$$

$$g(x) = x^2 + 3x + 10;$$

$$f(x) = (g(x))^2;$$

$$f'(x) = ((g(x))^2)' = 2g(x) \cdot (g(x))';$$

$$y' = 2(x^2 + 3x + 10) \cdot (x^2 + 3x + 10)' = 2(x^2 + 3x + 10)(2x + 3).$$

Производные высших порядков

Вторая производная это производная от первой производной, т.е. $y'' = (y')'$, и т.д.

Производные высших порядков обозначаются римскими цифрами.

Пример 71.

Найти четвертую производную $y = x^6 + 4x + 12$.

Решение:

вычисляем последовательно производные:

$$y' = 6x^5 + 4;$$

$$y'' = 30x^4;$$

$$y''' = 120x^3;$$

$$y^{IV} = 360x^2.$$

Инструкция

1. Внимательно прочитайте задания и выполните их в приведенной последовательности согласно своему варианту.
2. Максимальное время выполнения задания – 80 мин.

№ варианта	1.Найти производную функции y:	№ варианта	1.Найти производную функции y:
1	1. $y=6x^5-3\cos x+8x-9$ 2. $y=e^x(5x+7)$ 3. $y=\frac{\ln x}{\sin x}$ 4. $y=3^{x^3}$ 5. $y=\sqrt{\sin 2x}$	3	1.$y=4x-3\operatorname{tg}x+6x-8$ 2. $y=e^x\cdot\cos x$ 3.$y=\frac{3x-4}{5-4^x}$ 4.$y=(6x-9)^{11}$ 5.$y=\sqrt[8]{(\sin x)^5}$
	2.Исследовать функцию на монотонность и экстремум:		2.Исследовать функцию на монотонность и экстремум:
	1. $y=x^3-3x^2+4$ 2. $y=\frac{5-2x}{x^2-4}$		1. $y=\frac{1}{3}x^3-x^2-3x+\frac{1}{3}$ 2. $y=\frac{x}{x^2-1}$
2	1.Найти производную функции y:	4	1.Найти производную функции y:
	1. $y=-7x^3-13\operatorname{ctg}x+x-5$ 2. $y=4^x(5x+7\ln x)$ 3. $y=\frac{x-9}{\sin x}$ 4. $y=\ln(6x-3)$ 5. $y=\sqrt[4]{(3x-7)^3}$		1. $y=7x-9x^8+12$ 2. $y=x^5\cdot(7\cos x-8)$ 3. $y=\frac{tgx}{5lnx+7}$ 4. $y=\sqrt{\log_4(5x-8)}$ 5. $y=6^{\cos 4x}$
	2.Исследовать функцию на монотонность и экстремум:		2.Исследовать функцию на монотонность и экстремум:
	1. $y=-x^3+3x^2-2$ 2. $y=\frac{x^2}{x^2-1}$		1. $y=-x^3+3x^2-2$ 2. $y=\frac{x^3}{x^2-1}$

Контрольные вопросы:

1. Сформулируйте правила нахождения производной суммы, произведения, частного.
2. Как найти производную сложной функции?
3. Как применяется производная функции для исследования функции на монотонность, экстремум?

Практическая работа № 5.

Решение прикладных задач с помощью производной и дифференциала

Краткая теория

Общая схема построения графиков функций:

1) найти область определения функции;
2) найти точки пересечения графика функции с осями координат;
3) найти промежутки монотонности функции и экстремумы функции;
4) найти промежутки выпуклости и точки перегиба;
5) построить график функции, используя полученные результаты исследования.

Пример 1.

Исследовать функцию $y=(x+1)\cdot(x-2)^2$ и построить ее график.

Решение:

1) Данная функция является многочленом (можно раскрыть скобки, получим многочлен третьей степени), поэтому она определена, непрерывна и дифференцируема при любых x. Поэтому область определения функции – вся числовая прямая.

2) Вычислим точки пересечения графика функции с осями координат: график функции $y=(x+1)\cdot(x-2)^2$ пересекает ось Оx при $y=0$, т. е.

$$(x+1)\cdot(x-2)^2=0;$$

$$x+1=0 \text{ или } (x-2)^2=0;$$

$$x=-1 \text{ или } x=2.$$

График функции $y=(x+1)\cdot(x-2)^2$ пересекает ось Оy при $x=0$, т. е.

$$y=(0+1)\cdot(0-2)^2=1\cdot 4=4.$$

Т.о. мы получили три точки: (–1; 0), (2; 0), (0; 4).

3) Найдем промежутки монотонности функции и ее экстремумы с помощью первой производной:

$$y'=((x+1)\cdot(x-2)^2)'=3x\cdot(x-2).$$

Из уравнения $y'=0$ найдем критические точки:

$$3x\cdot(x-2)=0;$$

$$x_1=0,\ x_2=2.$$

Результаты решения занесем в таблицу:

x	$(-\infty, 0)$	0	$(0; 2)$	2	$(2; +\infty)$
y'	+	0	–	0	+

y	↗	4	↘	0	↗
	возраст ает	max	убывает	min	возраст ает

Функция возрастает на интервалах ($-\infty$, 0) и (2, $+\infty$), убывает на интервале (0; 2), имеет максимум при x=0 и минимум при x=2: $y_{\max}=y(0)=4$; $y_{\min}=y(2)=0$.

4) Найдем промежутки выпуклости и точки перегиба с помощью второй производной:

$$y''=(3x\cdot(x-2))'=6\cdot(x-1).$$

Кривая выпукла там, где $y''< 0$, т. е.

$$6\cdot(x-1) < 0,$$

$$x < 1.$$

Кривая вогнута там, где $y''> 0$, т. е. $x > 1$.

На интервале ($-\infty$, 1) кривая выпукла; на интервале (1, $+\infty$) – вогнута.

Точку перегиба найдем из уравнения $y''=0$. Т. о., $x=1$ – абсцисса точки перегиба, т.к. эта точка разделяет интервалы выпуклости и вогнутости кривой. Ордината точки перегиба: $y(1)=2$.

Результаты решения занесем в таблицу:

x	($-\infty$, 1)	1	(1; $+\infty$)
y''	-	0	+
y	∩	2	∪
	выпукла	перегиб	вогнута

5) По полученным точкам строим график:

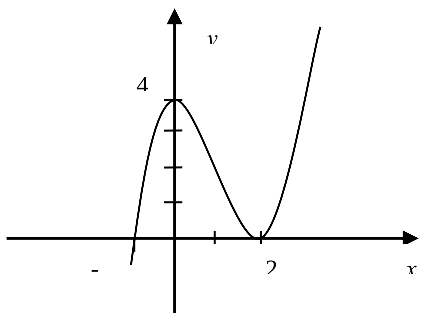


Рисунок. График функции $y=(x+1)\cdot(x-2)^2$

Инструкция

1. Внимательно прочитайте задания и выполните их в приведенной последовательности согласно своему варианту.
2. Максимальное время выполнения задания – 60 мин.

Вариант№1 Исследовать функцию и построить график: 3. y=x^3-3x^2+4 4. y=$\frac{5-2x}{x^2-4}$	Вариант№2 Исследовать функцию и построить график: 3. y=$\frac{1}{3}x^3-x^2-3x+\frac{1}{3}$ 4. y=$\frac{x}{x^2-1}$
Вариант№3 Исследовать функцию и построить график: 3. y=$-x^3+3x^2-2$ 4. y=$\frac{x^2}{x^2-1}$	Вариант№4 Исследовать функцию и построить график: 3. y=$-x^3+3x^2-2$ 4. y=$\frac{x^3}{x^2-1}$

Практическая работа № 6

Интегрирование функций.

Краткая теория

Табличные значения неопределенных интегралов

$\int dx = x + c$ $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$ $\int \frac{dx}{x} = \ln\lvert x\rvert + c$ $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$ $\int e^x dx = e^x + c$	$\int \sin x dx = -\cos x + c$ $\int \cos x dx = \sin x + c$ $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + c$ $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + c$	$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} arctg \frac{x}{a} + c$ $\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln\left\lvert \frac{x-a}{x+a} \right\rvert + c$

Интегрирование методом замены переменной

Сущность интегрирования методом замены переменной (способом подстановки) заключается в преобразовании интеграла $\int f(x)dx$ в интеграл $\int F(t)dt$, который легко вычисляется по таблице значений неопределенных интегралов.

Для нахождения интеграла $\int f(x)dx$ заменяем переменную x новой переменной t. Дифференцируя равенство, получаем выражение dx.

После того как интеграл относительно новой переменной t будет найден, с помощью обратной подстановки он приводится к переменной x.

Пример 1.

Вычислите интеграл методом замены переменной: $\int \cos(5x+3)dx$.

Решение:

с помощью замены части подынтегрального выражения приведем заданный интеграл к табличному виду:

$$\int \cos(5x+3)dx = \left| \begin{array}{l} t = 5x+3 \\ (5x+3)'dx = dt \\ 5dx = dt \\ dx = \frac{dt}{5} \end{array} \right| = \frac{1}{5}\int \cos t dt = \frac{\sin t}{5} + c = \frac{\sin(5x+3)}{5} + c.$$

Пример 2.

Вычислите интеграл методом замены переменной: $\int (2x+1)^{10} dx$.

Решение:

с помощью замены части подынтегрального выражения приведем заданный интеграл к табличному виду:

$$\int (2x+1)^{10}dx = \left| \begin{array}{l} t = 2x+1 \\ (2x+1)'dx = dt \\ 2dx = dt \\ dx = \dfrac{dt}{2} \end{array} \right| = \frac{1}{2}\int t^{10}dt = \frac{t^{11}}{2*11} + c = \frac{(2x+1)^{11}}{22} + c.$$

Интегрирование по частям

Вычисляя дифференциал произведения, имеем:

$$d(uv) = udv + vdu,$$

откуда

$$udv = d(uv) - vdu.$$

Если дифференциалы двух функций равны, то их неопределенные интегралы совпадают. Поэтому

$$\int udv = \int d(uv) - \int vdu$$

и, следовательно,

$$\int udv = uv - \int vdu.$$

С помощью этой формулы вычисление интеграла $\int udv$ сводится к вычислению интеграла $\int vdu$, если последний окажется проще исходного.

Пример 3.

Вычислите интеграл методом интегрирования по частям: $\int x\sin xdx$.

Решение:

преобразуя части подынтегрального выражения, приведем заданный интеграл к табличному виду:

$$\int x\sin xdx = \left| \begin{array}{ll} & dv = \sin xdx \\ u = x & \int dv = \int \sin xdx \\ du = dx & \\ & v = -\cos x \end{array} \right| = -x\cos x + \int \cos xdx = -x\cos x + \sin x + c.$$

Пример 4.

Вычислите интеграл методом интегрирования по частям: $\int \frac{\ln xdx}{x^2}$.

Решение:

преобразуя части подынтегрального выражения, приведем заданный интеграл к табличному виду:

$$\int \frac{\ln x dx}{x^2} = \left| \begin{matrix} u = \ln x & dv = \dfrac{dx}{x^2} \\ du = \dfrac{dx}{x} & \int dv = \int x^{-2} dx \\ & v = -\dfrac{1}{x} \end{matrix} \right| = -\frac{\ln x}{x} + \int \frac{dx}{x^2} = -\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x} + c .$$

Для вычисления определенного интеграла от функции $f(x)$ в том случае, когда можно найти соответствующий неопределенный интеграл $F(x)$, служит формула Ньютона – Лейбница:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a),$$

т.е. определенный интеграл равен разности значений первообразной при верхнем и нижнем пределах интегрирования.

Пример 5.

Вычислить определенный интеграл $\int_0^{10} (3t^2 + 2t + 1)dt$.

Решение:
по формуле Ньютона – Лейбница:

$$\int_2^{10} (3t^2 + 2t + 1)dt = \left(\frac{3t^3}{3} + \frac{2t^2}{2} + t \right)\Bigg|_2^{10} = \left(t^3 + t^2 + t\right)\Big|_2^{10} =$$
$$= \left(10^3 + 10^2 + 10\right) - \left(2^3 + 2^2 + 2\right) = 1110 - 14 = 1096.$$

Вычисление определенного интеграла методом замены переменной

При вычислении определенного интеграла методом замены переменной (способом подстановки) определенный интеграл $\int_a^b f(x)dx$ преобразуется с помощью подстановки $u=g(x)$ в определенный интеграл относительно новой переменной u. При этом старые пределы интегрирования a и b заменяются соответственно новыми пределами интегрирования α и β, которые вычисляются по формулам: $\alpha=g(a)$ и $\beta=g(b)$.

Пример 6.

Вычислить определенный интеграл $\int_2^3 (2x-1)^3 dx$.

Решение:
преобразуя части подынтегрального выражения, приведем заданный интеграл к табличному виду, далее воспользуемся формулой Ньютона – Лейбница:

$$\int_2^3 (2x-1)^3 dx = \left| \begin{array}{ll} u = 2x-1 & \\ du = (2x-1)'dx & u_1 = 2\cdot 3 - 1 = 5 \\ du = 2dx & u_2 = 2\cdot 2 - 1 = 3 \\ dx = \frac{1}{2}du & \end{array} \right| = \int_3^5 u^3 \frac{1}{2} du = \frac{1}{2}\cdot\frac{u^4}{4}\Big|_3^5 =$$

$$= \frac{5^4}{8} - \frac{3^4}{8} = \frac{625-81}{8} = \frac{544}{8} = 68.$$

Интегрирование по частям в определенном интеграле

Если функции $u(x)$ и $v(x)$ и их производные непрерывны в промежутке $[a; b]$, то формула интегрирования по частям для определенного интеграла имеет вид:

$$\int_a^b u dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v du.$$

Пример 7.

Вычислить определенный интеграл $\int_e^4 x \ln x dx$.

Решение:

преобразуя части подынтегрального выражения, приведем заданный интеграл к табличному виду, далее воспользуемся формулой Ньютона – Лейбница:

$$\int_e^4 x \ln x dx = \left| \begin{array}{ll} u = \ln x & dv = x dx \\ du = (\ln x)'dx & \int dv = \int x dx \\ du = \frac{dx}{x} & v = \frac{x^2}{2} \end{array} \right| = \frac{x^2}{2}\cdot \ln x\Big|_e^4 - \int_e^4 \frac{x^2}{2}\cdot\frac{dx}{x} =$$

$$= \frac{16}{2}\ln 4 - \frac{e^2}{2}\ln e - \int_e^4 \frac{x}{2}\cdot\frac{dx}{1} = 8\ln 4 - \frac{e^2}{2} - \left(\frac{x^2}{4}\right)_e^4 = 8\ln 4 - \frac{e^2}{2} - \left(\frac{4^2}{4} - \frac{e^2}{4}\right) =$$

$$= 8\ln 4 - \frac{e^2}{2} - 4 + \frac{e^2}{4} = 8\ln 4 - \frac{e^2}{4} - 4.$$

Инструкция

1. Внимательно прочитайте задания и выполните их в приведенной последовательности согласно своему варианту.
2. Максимальное время выполнения задания – 80 мин.

1) Найдите неопределенный интеграл:

№1	№2	№3
1. $\int \frac{\sqrt[5]{ctgx}dx}{sin^2x}$ 2. $\int (3{,}8sinx - 5cos\frac{x}{2})dx$ 3. $\int xe^{3x}\,dx$ 4. $\int sin\frac{x}{8}dx$ 5. $\int (8x+5)^{10}\,dx$	1. $\int cos\frac{x}{8}dx$ 2. $\int (5^x+12)^5 5^x\,dx$ 3. $\int \frac{xcos-3x^2-1}{x}dx$ 4. $\int \frac{dx}{xln^2x}$ 5. $\int x\cdot\sin(5x-1)\,dx$	1. $\int 7^x cos7^x dx$ 2. $\int (x+4)cosxdx$ 3. $\int sin5x\ dx$ 4. $\int \frac{xe^x+2x^2-1}{5x}dx$ 5. $\int 4sin^2\frac{x}{6}\ cos\frac{x}{6}dx$
№4	№5	№6
1. $\int \frac{e^x\,dx}{sin^2e^x}$ 2. $\int (sin3x+10x)\,dx$ 3. $\int lnx(x-4)dx$ 4. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^4}}$ 5. $\int \frac{4x+x\sqrt{x}}{x^2}dx$	1. $\int \frac{3x^2+x+1}{x}dx$ 2. $\int (1-x)sin4x\,dx$ 3. $\int (4x-8)^{12}dx$ 4. $\int \frac{x^4\,dx}{(\sin x^5)^2}$ 5. $\int cos5^x\cdot 5^x\ dx$ i.	1. $\int u^2\,(u-5)(u-6)du$ 2. $\int (sin6x+cos\frac{x}{6}-3)dx$ 3. $\int 7^{sinx}\,\mathrm{cos}x\,dx$ 4. $\int (x-4)\cos(x-4)^2\,dx$ 5. $\int (3-x)\,sinx\,dx$

2) Вычислите определенный интеграл.

Вариант 1	Вариант 2
1. $\int_0^1 \frac{x^2dx}{2+x^3}$ 2. $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{1+tgx}}{cos^2x}dx$ 3. $\int_1^2 \frac{2^x dx}{1-2^x}$	1. $\int_1^e \frac{sinlnx}{5x}dx$ 2. $\int_1^2 \frac{2^x dx}{1+4^x}$ 3. $\int_0^{\frac{1}{2}} e^{sinx\pi}\,cos\pi x dx$
Вариант 3	**Вариант 4**
1. $\int_{-1}^2 (3x^2+4x-1)\,dx$ 2. $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{3+ctgx}}{sin^2x}dx$ 3. $\int_{-1}^0 (2x+3)e^{-x}\,dx$	1. $\int_{-1}^2 (3x^2+4x-1)\,dx$ 2. $\int_{-1}^0 \frac{x^2}{1-4x^3}dx$ 3. $\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} (2-x)\sin 3x\,dx$

Контрольные вопросы:

1. Сформулируйте правила непосредственного интегрирования.
2. В каких случаях применяется способ интегрирования подстановкой?
3. Назовите формулу для интегрирования по частям. Что надо принять за u, а что за dv?
4. Что такое определенный интеграл. Напишите формулу Ньютона-Лейбница.

Практическое занятие №7

Решение прикладных задач с помощью интеграла

Краткая теория

Физические приложения определенных интегралов

Вычисление пути, пройденного точкой

Путь, пройденный точкой при неравномерном движении по прямой с переменной скоростью $V=f(t)>0$ за промежуток времени от t_1 до t_2, вычисляется по формуле $S=\int_{t_1}^{t_2} f(t)dt$.

Пример 1.

Скорость движения точки изменяется по закону $V=(3t^2+2t+1)$ м/с. Найти путь, пройденный точкой за 10с от начала движения.

Решение:

согласно условию, $f(t)=3t^2+2t+1$, $t_1=0$, $t_2=10$. По формуле $S=\int_{t_1}^{t_2} f(t)dt$

находим

$$S=\int_0^{10}(3t^2+2t+1)dt=\left(\frac{3t^3}{3}+\frac{2t^2}{2}+t\right)\Bigg|_0^{10}=\left(t^3+t^2+t\right)\Big|_0^{10}=10^3+10^2+10=1110\ (м).$$

Вычисление работы силы

Работа, произведенная переменной силой $f(x)$ при перемещении по оси Оx материальной точки от $x=a$ до $x=b$, находится по формуле:

$$A=\int_a^b f(x)dx.$$

При решении задач на вычисление работы силы часто используется закон Гука: $F=kx$, где F-сила, $Н$; x – абсолютное удлинение пружины, $м$, вызванное силой F, а k – коэффициент пропорциональности, $Н/м$.

Пример 2.

Сжатие x винтовой пружины, пропорционально приложенной силе F. Вычислить работу силы F при сжатии пружины на 0,04 м, если для сжатия ее на 0,01 м нужна сила 10 Н.

Решение:

т.к. $x=0{,}01м$ при $F=10Н$, то, подставляя эти значения в равенство $F=kx$, получим $10=0{,}01k$, откуда $k=1000$ $Н/м$.

Подставив теперь в это же равенство значение k, находим $F=1000x$, т.е. $f(x)=1000x$. Искомую работу найдем по формуле $A=\int_a^b f(x)dx$, полагая $a=0$, $b=0{,}04$:

$$A=\int\limits_0^{0{,}04}1000xdx=\left(\frac{1000x^2}{2}\right)\Bigg|_0^{0{,}04}=500x^2\Big|_0^{0{,}04}=500\cdot 0{,}04^2=0{,}8\ (\text{Дж}).$$

Инструкция

1. Внимательно прочитайте задания и выполните их в приведенной последовательности согласно своему варианту.
2. Максимальное время выполнения задания – 80 мин.

Задание 1. Вычислить интегралы.

1) $\int\left(\frac{7}{x^2+16}-\frac{x^4+5}{x^5}+3\sqrt{x}\right)dx$ $\quad\int\left(\frac{5}{5x^2+5}+7^x-\frac{\sin 2x}{\cos x}\right)dx$

2) $\int\left(\frac{5}{\sqrt{3+x^2}}-\frac{2x^2+10}{x}+4\sqrt[6]{x^5}\right)dx$ $\quad\int\left(\frac{2}{2x^2+2}+2^x-\frac{x^2-4}{x+2}\right)dx$

3) $\int\left(\frac{2+\sqrt{x}}{x}-\frac{2}{\sqrt{x^2+3}}+4e^x\right)dx$ $\quad\int\left(\frac{12}{3+3x^2}-3\cos x+\frac{x^2-9}{x-3}\right)dx$

4) $\int\left(\frac{8}{\sqrt{5+x^2}}+\frac{6+x^3}{x^4}-3\sqrt[8]{x^5}\right)dx$ $\quad\int\left(\frac{6}{2x^2+2}-2\sin x+3^x\right)dx$

5) $\int\left(\frac{2}{\sqrt{4-x^2}}+\frac{4x^2-1}{x^3}-2\sqrt[8]{x^3}\right)dx$ $\quad\int\left(\frac{6}{3x^2-9}+\frac{3\sin^3 x-5}{\sin^2 x}\right)dx$

6) $\int\left(\frac{3\cos^3 x-2}{\cos^2 x}-5\sqrt[5]{x^3}\right)dx$ $\quad\int\left(\frac{16}{2x^2-8}-\frac{3-x^3}{x^4}+5^x\right)dx$

Задание 2. Проинтегрировать подходящей заменой переменного.

1) $\int\frac{dx}{\sin^2 3x}$ $\quad\int\frac{xdx}{\sqrt{2+x^2}}$ $\quad\int e^{1-3x}\,dx$

2) $\int(2x-1)\cos(x^2-x)\,dx$ $\quad\int x\sqrt{5+x^2}\,dx$ $\quad\int e^{6x+5}\,dx$

3) $\int 10^{2x+1}\,dx$ $\quad\int\sin\frac{x}{2}\,dx$ $\quad\int\frac{dx}{5x+3}$

4) $\int x^2(3-x^3)^{10}\,dx$ $\quad\int\cos 2x\,dx$ $\quad\int e^{\sin x}\cos x\,dx$

5) $\int\frac{dx}{x\ln x}$ $\quad\int\sin 2x\,dx$ $\quad\int 3^{7x-1}\,dx$

6) $\int\frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}$ $\quad\int\sin(2-3x)dx$ $\quad\int\frac{dx}{e^{3x}}$

Задание 3. Вычислить определенный интеграл.

1) $\int_{1}^{2}\left(x^3+10x\right)dx$

2) $\int_{-2}^{3}\left(3x^2+6x-2\right)dx$

3) $\int_{1}^{3}\left(x^2-16x+3\right)dx$

4) $\int_{0}^{8}\left(21x-19\right)dx$

5) $\int_{-4}^{0}\left(x^3+8\right)dx$

6) $\int_{10}^{13}\left(2x+7\right)dx$

Практическая работа №8

Приближенное вычисление определенного интеграла по формуле прямоугольников

Краткая теория

Пусть на отрезке [a; b], a < b, задана непрерывная функция f(x). Требуется вычислить интегралчисленно равный площади соответствующей

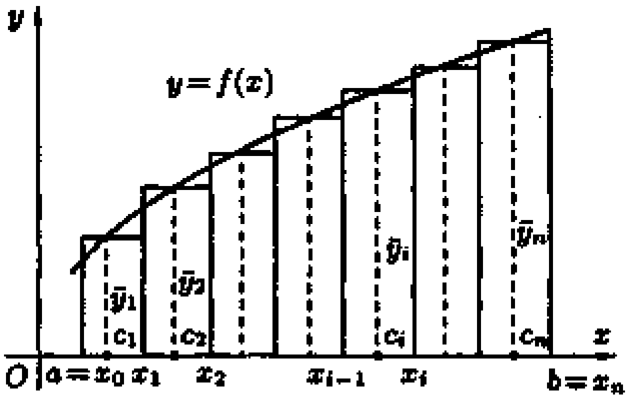


Рис. 200.

$$\int_a^b f(x)\,dx,$$

криволинейной трапеции. Разобьем основание этой трапеции, т. е. отрезок [a; b], на n равных частей (отрезков) длины $h = \frac{b-a}{n} = x_i - x_{i-1}$ (шаг разбиения) с помощью точек $x_0 = a$, $x_1, x_2, \ldots, x_n = b$. Можно записать, что $x_i = x_0 + h \cdot i$, где i = 1,2,..., n (см. рис. 200).

В середине $c_i = \frac{x_{i-1} + x_i}{2}$ каждого такого отрезка построим ординату $\hat{y}_i = f(c_i)$ графика функции y = f(x). Приняв эту ординату за высоту, построим прямоугольник с площадью $h \cdot \hat{y}_i$.

Тогда сумма площадей всех n прямо угольников дает площадь ступенчатой фигуры, представляющую собой приближенное значение искомого определенного интеграла

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx h(\bar{y}_1 + \bar{y}_2 + \cdots + \bar{y}_n) = \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{x_{i-1} + x_i}{2}\right). \qquad (42.1)$$

Формула (42.1) называется формулой средних прямоугольников.

Абсолютная погрешность приближенного равенства (42.1) оценивается с помощью следующей формулы:

$$|R_n| \leqslant \frac{(b-a)^3 \cdot M_2}{24n^2},$$

где M_2 — наибольшее значение $|f''(x)|$ на отрезке [a; b],

$$|R_n| = \left| \int_a^b f(x)\,dx - \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{x_{i-1} + x_i}{2}\right) \right|.$$

Отметим, что для линейной функции (f(x)=kx+b) формула (42.1) дает точный ответ, поскольку в этом случае f''(x)=0.

Инструкция

1. Внимательно прочитайте задания и выполните их в приведенной последовательности согласно своему варианту.
2. Максимальное время выполнения задания – 60 мин.

Вычислить определенный интеграл методами прямоугольников и трапеций.

№ Вар.	Задание	№ Вар.	Задание
1	$\int_{0.8}^{1.6} \frac{dx}{\sqrt{2x^2+1.3}}$ $\int_{1.6}^{2.4} (x+1)\sin(x)dx$ $\int_{0.6}^{0.72} (\sqrt{x}+1)\cdot tg(2x)dx$	3	$\int_{1.2}^{2.8} \frac{\lg(1+x^2)}{2x-1}dx$ $\int_{0.32}^{0.66} \frac{dx}{\sqrt{x^2+2.3}}$ $\int_{0.4}^{1.2} \frac{\cos x}{x+2}dx$
2	$\int_{1.2}^{2.7} \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}$ $\int_{2.3}^{2.5} \frac{dx}{\sqrt{x^2-4}}$ $\int_{0}^{2} e^{-x^2}dx$	4	$\int_{0.8}^{1.6} \frac{dx}{\sqrt{2x^2+1}}$ $\int_{0.6}^{1.4} \frac{dx}{\sqrt{12x^2+0.5}}$ $\int_{0}^{4} \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}$

Практическое занятие №9

Решение дифференциальных уравнений по видам профессиональной деятельности

Краткая теория

Дифференциальное уравнение вида y`=f(x)g(y), (1) где f(x) и g(y) – заданные функции, называются уравнениями с разделяющимися переменными.

Правило нахождения общего решения.

Для нахождения общего решения дифференциального уравнения с разделяющимися переменными следует:

1. разделить переменные, т.е. преобразовать данное уравнение к виду

p(y)dy = f(x)dx ; (1)

2) проинтегрировать обе части полученного уравнения по **y** и по **x** соответственно, т.е. найти некоторую первообразную **P(y)** функции **p(y)** и некоторую первообразную **F (x)** функции **f(x)**;

3) написать уравнение **P(y) =F(x) + C** (2),

где**C**- произвольная постоянная.

Решив уравнение (2) относительно y, получим общее решение дифференциального уравнения (1) :

y = φ (x;C),

которое называется также **общим решением данного уравнения.**

Пример 1. Решить уравнение

y` = 1.

Решение:

Представим y`через $\frac{dy}{dx}$ : y`=$\frac{dy}{dx}$. Тогда$\frac{dy}{dx}$ =1. Умножим обе части уравнения на dx, получим:dy= 1dx.

Интегрируем обе части уравнения:$\int dy = \int 1dx$.

Отдельно найдем каждый интеграл:

$\int dy$ =y ;$\int 1dx$ =x+C.

Приравниваем полученный результат:

y = x+C.

Итак, решением является функция y =x+C.

Ответ: y = x+C.

Пример 2. Решить уравнение

y` = x

Решение: Представим y` через $\frac{dy}{dx}$ : y`=$\frac{dy}{dx}$. Тогда$\frac{dy}{dx}$ = x

Умножим обе части уравнения на dx, получим :dy= xdx.

Интегрируем обе части уравнения:$\int dy = \int xdx$.

Отдельно найдем каждый интеграл:

$\int dy$ =y ;$\int xdx = \frac{1}{2}x^2 + C$.

Приравниваем полученный результат: $y = \frac{1}{2}x^2 + C$.

Итак, решением является $y = \frac{1}{2}x^2 + C$.

Ответ: $y = \frac{1}{2}x^2 + C$.

Пример 3. Решить уравнение

$y` = xy$.

Решение: Представим $y`$ через $\frac{dy}{dx}$: $y` = \frac{dy}{dx}$. Тогда $\frac{dy}{dx} = xy$

Умножим обе части уравнения на dx, получим :dy= xydx.

Разделим обе части уравнения на y, получим :

$\frac{dy}{y} = xdx$

Интегрируем обе части уравнения: $\int \frac{dy}{y} = \int xdx$

Отдельно найдем каждый интеграл:

$\int \frac{dy}{y} = \ln|y|$ $\int xdx = \frac{1}{2}x^2 + C$.

Приравнивая полученный результат, имеем: $\ln|y| = \frac{1}{2}x^2 + C_1$, где C_1- произвольная постоянная. Отсюда следует, что

$|y| = e^{\frac{1}{2}x^2 + C}$ или $y = Ce^{\frac{1}{2}x^2}$, где $C = e^{C1}$

Таким образом, формула $y = Ce^{\frac{1}{2}x^2}$ задает все решения уравнения.

Ответ: $y = Ce^{\frac{1}{2}x^2}$.

Пример 4. Решить уравнение

$y` = xy^2$.

Решение: Представим $y`$ через $\frac{dy}{dx}$: $y` = \frac{dy}{dx}$. Тогда $\frac{dy}{dx} = xy^2$.

Умножим обе части уравнения на dx, получим :$dy = xy^2dx$.

Разделив переменные, получим: $\frac{dy}{y^2} = xdx$

Проинтегрировав обе части уравнения $\int \frac{dy}{y2} = \int xdx$, получим:

$\int \frac{dy}{y^2} = -\frac{1}{y}$; $\int xdx = \frac{1}{2}x^2 + C$ и, следовательно, $-\frac{1}{y} = \frac{1}{2}x^2 + C$.

Таким образом, общее решение данного уравнения имеет вид:

$$y = -\frac{2}{x^2 + C},\qquad \text{где } C \text{ – произвольная постоянная.}$$

Ответ: $y = -\frac{2}{x^2 + C}$

Пример 5. Решить уравнение

$y` = -\frac{x}{y}$.

Решение. Представим $y`$ через $\frac{dy}{dx}$: $y` = \frac{dy}{dx}$. Тогда $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$.

Разделив переменные: $ydy = -xdx$,

и проинтегрировав: $\int ydy = \int -xdx$,

получим: $\int ydy = \frac{1}{2}y^2, -\int xdx = -\frac{1}{2}x^2 + C$

$y^2 + x^2 = C$.

Очевидно, что здесь $C>0$. Положим $C = R^2$.

Полученное уравнение является уравнением окружности радиуса R с центром в точке (0;0). Оно при каждом фиксированном R>0 определяет две дифференцируемые функции

$$y= \pm\sqrt{R^2 - x^2},\ x \in (a; b),$$

которые и являются решениями данного уравнения.

Ответ: $y= \pm\sqrt{R^2 - x^2},\ x \in (a; b)$.

Инструкция

1. Внимательно прочитайте задания и выполните их в приведенной последовательности согласно своему варианту.
2. Максимальное время выполнения задания – 60 мин.

Вариант № 1	Вариант № 2	Вариант № 3
1. Являются ли данные функции решениями данных дифференциальных уравнений		
$y = c_1e^x + c_2xe^x,\quad y'' + 2y' + y = 0$	$y = c_1e^{3x} + c_2e^x,\quad y'' - y' - 6y = 0$	$y = c_1e^{-2x} + c_2xe^{-2x},\quad y'' + 4y' + 4y = 0$
2. Найти частные решения дифференциальных уравнений с разделяющимися переменными.		
1) $4xydx - (x^2 + 1)dy = 0;$ при x=1 и y=4 2) $y\sin xdx + \cos xdy = 0;$ $x = \frac{\pi}{3}$ $y = \frac{1}{2}$	1) $\frac{dy}{x-1} - \frac{dx}{y-2} = 0;$ x=0 и y=4 2) $\sqrt{x}dy - \sqrt{y}dx = 0;$ при y=0 и x=0	1) $\frac{dy}{x^2} - \frac{dx}{y^2} = 0;$ при x=0 и y=2 2) $(1+y)dx - (1-x)dy = 0;$ y(-2)=3
3. Решить дифференциальные уравнения:		
$y' = 1 + x$	$(1+x^2)y' - 2xy = 0$	$ydy - (1+2x)dx = 0$

Практическая работа № 10

Действия над комплексными числами в различных формах записи

Краткая теория

Алгебраическая форма комплексного числа

Обозначим $\sqrt{-1} = i$ и назовём мнимой единицей, ($i^2 = -1$). Тогда число вида $z = a + bi$, где a и b - любые действительные числа, назовём комплексным числом.

Здесь a - называют действительной частью комплексного числа, bi - называют мнимой частью, b - коэффициентом мнимой части комплексного числа.

Действия над комплексными числами, представленными в алгебраической форме

Пусть даны два числа $z_1 = a_1 + b_1 i,$ и $z_2 = a_2 + b_2 i$.

Для этих чисел понятия равенство и действия сложения, умножения определены следующим образом:

1) Два комплексных числа называются равными, если равны их действительная и мнимая части, т. е. $a_1 = a_2$, $b_1 = b_2$.

2) Суммой двух комплексных чисел z_1 и z_2 называется комплексное число $z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i$.

3) Произведением двух комплексных чисел z_1 и z_2 называется комплексное число $z_1 z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1)i$.

4) Модулем комплексного числа называется длина вектора соответствующего этому комплексному числу на плоскости и вычисляется по формуле: $|\vec{z}| = r = \sqrt{a^2 + b^2}$.

5) Аргументом комплексного числа называется угол, образованный вектором с положительным направлением действительной оси и вычисляется по формуле: $\arg z = \arg(a + bi) = \phi + 2\pi k$. Т. о. для каждого комплексного числа можно указать бесконечное множество аргументов.

Для нахождения аргумента необходимо:

1. Определить в какой координатной четверти находится комплексное число.

2. Найти в этой четверти угол решив уравнение:

$$tg\phi = \frac{b}{a};\ \ \phi = arctg\frac{b}{a} = \phi + \pi k,\ \ k \in Z.$$

Пример 7.

Решите квадратное уравнение: $x^2 - 6x + 13 = 0$.

Решение:

вычислим корни квадратного уравнения через дискриминант:

$$x_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 4 \cdot 13}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 52}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{-16}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{16 \cdot (-1)}}{2} = \frac{6 \pm 4i}{2}.$$

$$x_1 = \frac{6 \pm 4i}{2} = \frac{2(3+2i)}{2} = 3+2i; \quad x_2 = 3 - 2i.$$

Получена пара взаимно - сопряжённых комплексных чисел $3 \pm 2i,$ где $a = 3; b = 2.$

Заметим, что всякое алгебраическое уравнение степени n имеет ровно n корней, среди которых могут быть как действительные (различные или равные), так и комплексные (обязательно попарно взаимно – сопряжённые) корни.

Тригонометрическая форма комплексного числа

Запись комплексного числа в виде $a + bi = r(\cos\phi + i\sin\phi)$ называется тригонометрической формой комплексного числа.

Действия над комплексными числами, представленными в тригонометрической форме

Над комплексными числами в тригонометрической форме выполняются действия умножения, деления, возведения в степень и извлечение корня n-ой степени.

Пусть даны два числа $z_1 = r_1(\cos\phi_1 + i\sin\phi_1)$ и $z_2 = r_2(\cos\phi_2 + i\sin\phi_2)$, тогда:

1) Произведением комплексных чисел называется комплексное число, которое вычисляется по формуле: $z_1 z_2 = r_1 r_2(\cos(\phi_1 + \phi_2) + i\sin(\phi_1 + \phi_2))$.

2) Частным комплексных чисел называется комплексное число, которое вычисляется по формуле: $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\phi_1 - \phi_2) + i\sin(\phi_1 - \phi_2))$.

3) Для возведения в степень: $z^n = r^n(\cos(n\phi) + i\sin(n\phi))$.

Пример 8.

Упростите: $\frac{1+2i^5}{1+3i^{21}}$.

Решение:

упростим дробь (понизим степень числителя и знаменателя), используя ($i^2 = -1$):

$$i^5 = i^4 i^1 = (i^2)^2 i = (-1)^2 i = i;$$
$$i^{21} = i^{20} i^1 = (i^2)^{10} i = (-1)^{10} i = i.$$

Подставим полученные выражения в исходную дробь и преобразуем её:

$$\frac{1+2i^5}{1+3i^{21}} = \frac{1+2i}{1+3i} = \frac{(1+2i)(1-3i)}{(1+3i)(1-3i)} = \frac{1-3i+2i-6i^2}{1+9} = \frac{1-i+6}{10} = \frac{7-i}{10} = \frac{7}{10} - \frac{i}{10}.$$

Пример 9.

Вычислите: $(\sqrt{2}(\cos 10^0 + i\sin 10^0))^2 \cdot 2(\cos 40^0 + i\sin 40^0)$.

Решение:

для первого комплексного числа используем формулу возведения в степень, а затем воспользуемся формулой произведения комплексных чисел:

$$2(\cos 20^0 + i\sin 20^0)\cdot 2(\cos 40^0 + i\sin 40^0) = 4(\cos 60^0 + i\sin 60^0) = 4(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}) = 2 + 2\sqrt{3}i.$$

Для извлечения корня n-й степени из комплексного числа $r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ используется формула:

$$z_k = \sqrt[n]{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right),$$

где $\sqrt[n]{r}$ - арифметический корень, $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$.

Пример 10.

Решите уравнение: x^2-2x+10=0.

Решение:

для решения воспользуемся обычными формулами вычисления корней квадратных уравнений:

$$a = 1,\ b = -2,\ c = 10,$$

$$D = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4\cdot 1\cdot 10 = 4 - 40 = -36.$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{2 \pm \sqrt{-36}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{36\cdot(-1)}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{36\cdot i^2}}{2} = \frac{2 \pm 6i}{2} = \frac{2(1 \pm 3i)}{2} = 1 \pm 3i.$$

Получили пару комплексных взаимно сопряженных корней.

Инструкция

1. Внимательно прочитайте задания и выполните их в приведенной последовательности согласно своему варианту.
2. Максимальное время выполнения задания – 60 мин.

Вариант 1

1) Выполнить действия в алгебраической форме записи:

а) $\frac{3-2i}{1+3i}$; б) $(-2-i)(1+i)$;

2) Записать комплексные числа в тригонометрической форме и выполнить действия:

$Z_1 = -\sqrt{3} - i;$ $Z_2 = 2 - 2i$ а) $\frac{Z_1}{Z_2}$; б) Z_2^2

3) Выполнить действия над комплексными числами в показательной форме:

$Z_1 = -6 - 6i\sqrt{3};$ $Z_2 = -1 - i$ а) $Z_1 \cdot Z_2$; б) Z_2^4

Вариант 2

1) Выполнить действия в алгебраической форме записи:

а) $\frac{2+3i}{4+i}$; б) $(3+2i)(2-i)$;

2) Записать комплексные числа в тригонометрической форме и выполнить действия:

$Z_1 = 6i;$ $\quad Z_2 = -2 + 2i\sqrt{3}$ $\quad$ а) $Z_1 \cdot Z_2$ $\quad$ б) Z_1^2

3) Выполнить действия над комплексными числами в показательной форме:

$Z_1 = -4 - 4i;$ $\quad Z_2 = -4 + 4i\sqrt{3}$

а) $\dfrac{Z_1}{Z_2};$ $\quad$ б) Z_2^3

Практическая работа №11

Применение комплексных чисел при решении задач по видам профессиональной деятельности

Краткая теория

Действия над комплексными числами, представленными в алгебраической форме

Пусть даны два числа $z_1 = a_1 + b_1 i,$ и $z_2 = a_2 + b_2 i$.

Для этих чисел понятия равенство и действия сложения, умножения определены следующим образом:

6) Два комплексных числа называются равными, если равны их действительная и мнимая части, т. е. $a_1=a_2$, $b_1=b_2$.

7) Суммой двух комплексных чисел z_1 и z_2 называется комплексное число $z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i$.

8) Произведением двух комплексных чисел z_1 и z_2 называется комплексное число $z_1 z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1)i$.

9) Модулем комплексного числа называется длина вектора соответствующего этому комплексному числу на плоскости и вычисляется по формуле: $|\vec{z}| = r = \sqrt{a^2 + b^2}$.

10) Аргументом комплексного числа называется угол, образованный вектором с положительным направлением действительной оси и вычисляется по формуле: $\arg z = \arg(a + bi) = \phi + 2\pi k$. Т. о. для каждого комплексного числа можно указать бесконечное множество аргументов.

Для нахождения аргумента необходимо:

1. Определить в какой координатной четверти находится комплексное число.

2. Найти в этой четверти угол решив уравнение:

$$tg\phi = \frac{b}{a};\ \phi = arctg\,\frac{b}{a} = \phi + \pi k,\ k \in Z .$$

Действия над комплексными числами, представленными в тригонометрической форме

Над комплексными числами в тригонометрической форме выполняются действия умножения, деления, возведения в степень и извлечение корня *n*-ой степени.

Пусть даны два числа $z_1 = r_1(\cos\phi_1 + i\sin\phi_1)$ и $z_2 = r_2(\cos\phi_2 + i\sin\phi_2)$, тогда:

1) Произведением комплексных чисел называется комплексное число, которое вычисляется по формуле: $z_1 z_2 = r_1 r_2(\cos(\phi_1 + \phi_2) + i\sin(\phi_1 + \phi_2))$.

2) Частным комплексных чисел называется комплексное число, которое вычисляется по формуле: $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\phi_1 - \phi_2) + i\sin(\phi_1 - \phi_2))$.

3) Для возведения в степень: $z^n = r^n(\cos(n\phi) + i\sin(n\phi))$.

Пример1. Вычислить $(1 + 2i)i - \frac{3 + 2i}{1 - i}$

1) $(1+2i)i = i + 2i^2 = -2 + i$

2) $\frac{3+2i}{1-i} = \frac{3-2}{1+1} + \frac{2+3}{1+1}i = \frac{1}{2} + \frac{5}{2}i$

3) $(-2+i) - \left(\frac{1}{2} + \frac{5}{2}i\right) = -\frac{5}{2} - \frac{3}{2}i$

Пример2. Вычислить *(2- i)*^{2}.

$(2-i)^2 = 4 - 4i + i^2 = 4 - 4i - 1 = 3 - 4i.$

Примеры 3. Выполнить умножение и деление комплексных чисел:

$z_1 = 2(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3})$ $z_2 = 2\sqrt{3}(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6})$

$z_1 z_2 = 4\sqrt{3}(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2})$

$\frac{z_1}{z_2} = \frac{1}{\sqrt{3}}(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6})$

Примеры 4. Выполнить возведение в степень комплексное число $z = 2\sqrt{3}(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6})$

$z^{20} = (2\sqrt{3})^{20}(\cos\frac{10\pi}{3} + i\sin\frac{10\pi}{3})$

Примеры 5. Выполнить извлечение корня из комплексного числа: $z = 1 + \sqrt{3}i$

Найдём $\sqrt{z}$ (корень квадратный, значит n = 2).

Модуль $|z| = 2$, аргумент $\varphi = \frac{\pi}{3}$

$\sqrt{z} = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{3}+2\pi k}{n} + i\,sin\,\frac{\frac{\pi}{3}+2\pi k}{n}\right)$, так как n = 2, то k = 0; 1

при k = 0 получаем $k_0 = \sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6})$

при k = 1 получаем $k_1 = \sqrt{2}(\cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6})$

Инструкция

1. Внимательно прочитайте задания и выполните их в приведенной последовательности согласно своему варианту.
2. Максимальное время выполнения задания – 70 мин.

Задание 1. Выполните действия в алгебраической форме. Результат запишите в тригонометрической и показательной формах:	Задание 2. Выполните действия в тригонометрической форме. Результат запишите в показательной и алгебраической формах:
Вариант 1 $\frac{1+i}{1-2i} - \left(\frac{4}{5} - \frac{2}{5}i\right)$.	$4(\cos 220^o + i\sin 220^o) \cdot 1{,}5(\cos 20^o + i\sin 20^o)$.
Вариант 2 $\frac{2(1-i\sqrt{3})}{1+i\sqrt{3}}$.	$3(\cos 280^o + i\sin 280^o) : \frac{3}{4}(\cos 70^o + i\sin 70^o)$.

Вариант 3 $(1+i\sqrt{3}\,)^2$	$(2(\cos 50^{o} + i \sin 50^{o}))^{6}$.
Вариант 4 $\frac{2(1-i\sqrt{3})}{i(\sqrt{3}-i)}$	$10(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}):2(\cos\frac{\pi}{4}+\ i\sin\frac{\pi}{4})$.
Вариант 5 $\frac{2(1+i\sqrt{3})}{1-i}-\left(1+i\sqrt{3}\right)$	3 $(\cos 340^{o} + i \sin 340^{o})$:$\frac{3}{8}$ $(\cos 25^{o} + i \sin 25^{o})$

Контрольные вопросы

1. Дайте определение комплексного числа.
2. Дайте определение мнимой единицы.
3. Какие комплексные числа называются сопряженными?
4. Как изображаются комплексные числа геометрически?
5. Дайте определение модуля и аргумента комплексного числа.
6. Перечислите формы записи комплексного числа.
7. Как выполняются действия над комплексными числами, заданными в алгебраической форме; в тригонометрической форме; в показательной форме?
8. Найдите модуль и аргумент комплексного числа $z=-2+2\sqrt{3}$.
9. Запишите в тригонометрической форме комплексное число $Z=-\sqrt{3}+i$.
10. Запишите в алгебраической форме комплексное число z=5i.

Практическая работа №12

Решение простейших задач теории вероятностей и математической статистики

Краткая теория

Вероятность несовместных событий

Вероятность появления одного из нескольких попарно несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий: $P(A+B)=P(A)+P(B)$.

Пример 1.

В ящике в случайном порядке разложены 20 деталей, причем пять из них стандартные. Рабочий берет наудачу три детали. Найти вероятность того, что, по крайней мере, одна из взятых деталей окажется стандартной (событие A).

Решение:

очевидно, что, по крайней мере, одна из взятых деталей окажется стандартной, если произойдет любое из трех несовместных событий: B – одна деталь стандартная, две нестандартные; C – две детали стандартные, одна нестандартная; $Д$ – три детали стандартные.

Т.о., событие A можно представить в виде суммы этих трех событий: $A=B+C+Д$.

Тогда $P(A)=P(B)+P(C)+P(Д)$.

Вычислим вероятность каждого события:

$$P(B)=\frac{C_5^1\cdot C_5^2}{C_{20}^3}=\frac{5\cdot 15\cdot 14}{1\cdot 1\cdot 2}=\frac{35}{76}$$

$$P(C)=\frac{C_5^2\cdot C_{15}^1}{C_{20}^3}=\frac{5\cdot 4\cdot 15\cdot 1\cdot 2\cdot 3}{1\cdot 2\cdot 1\cdot 20\cdot 19\cdot 18}=\frac{5}{38}$$

$$P(Д)=\frac{C_5^3}{C_{20}^3}=\frac{5\cdot 4\cdot 3\cdot 1\cdot 2\cdot 3}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 20\cdot 19\cdot 18}=\frac{1}{114}$$

Итак,

$$P(A)=\frac{35}{76}+\frac{5}{38}+\frac{1}{114}=\frac{137}{228}=0{,}601$$

Вероятность совместных событий

Вероятность появления хотя бы одного из двух совместных событий равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их совместного появления:

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)$$

Пример 2.

Найти вероятность того, что наудачу взятое двузначное число окажется кратным либо 3, либо 5, либо тому и другому одновременно?

Решение:

пусть *A* – число кратно 3, *B* – число кратно 5. Всего имеется 90 двузначных чисел: 10, 11, …, 98, 99. Из них 30 – кратные 3, 18 – кратные 5 и шесть чисел одновременно кратны и 3 и 5, поэтому:

$$P(A)=\frac{30}{90}=\frac{1}{3},\ P(B)=\frac{18}{90}=\frac{1}{5},\ P(AB)=\frac{6}{90}=\frac{1}{15}.$$

Т.к. *A* и *B* совместные события, то по формуле имеем:

$$P(A)=\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{15}=\frac{7}{15}=0{,}467.$$

Пусть вероятность события *B* не зависит от появления события *A*.
Событие B называют *независимым от события A*, если появление события *A* не изменяет вероятности события *B*, т. е. если условная вероятность события *B* равна его безусловной вероятности:

$$P_A(B) = P(B).$$

Итак, если событие *B* не зависит от события *A*, то событие *A* не зависит от события *B*; это означает, что *свойство независимости событий взаимно*.
Для независимых событий теорема умножения имеет вид:

$$P\ (AB) = P\ (A)\cdot P\ (B),$$

т. е. вероятность совместного появления двух независимых событий равна произведению вероятностей этих событий.
Два события называют *независимыми*, если вероятность их совмещения равна произведению вероятностей этих событий; в противном случае события называют *зависимыми*.
На практике о независимости событий заключают по смыслу задачи. Например, вероятности поражения цели каждым из двух орудий не зависят от того, поразило ли цель другое орудие, поэтому события «первое орудие поразило цель» и «второе орудие поразило цель» независимы.

Несколько событий называют *попарно независимыми*, если каждые два из них независимы. Например, события *A*, *B*, *C* попарно независимы, если независимы события *A* и *B*, *A* и *C*, *B* и *C*.

Пример 3.
Пусть в урне имеется 4 шара, окрашенные: один – в красный цвет (*A*), один – в синий цвет (*B*), один – в черный цвет (*C*) и один – во все эти три цвета (*ABC*). Чему равна вероятность того, что извлеченный из урны шар имеет красный цвет?
Решение:
т.к. из четырех шаров два имеют красный цвет, то $P(A)=2/4=1/2$.
Рассуждая аналогично, найдем $P(B)=1/2$, $P(C)=1/2$.
Допустим теперь, что взятый шар имеет синий цвет, т. е. событие *B* уже произошло. Изменится ли вероятность того, что извлеченный шар имеет красный цвет, т. е. изменится ли вероятность события *A*?

Из двух шаров, имеющих синий цвет, один шар имеет и красный цвет, поэтому вероятность события A по-прежнему равна 1/2. Другими словами, условная вероятность события A, вычисленная в предположении, что наступило событие B, равна его безусловной вероятности. Следовательно, события A и B независимы.
Аналогично придем к выводу, что события A и C, B и C независимы. Итак, события A, B и C попарно независимы.
Независимы ли эти события в совокупности? Оказывается, нет. Действительно, пусть извлеченный шар имеет два цвета, например синий и черный. Чему равна вероятность того, что этот шар имеет и красный цвет? Лишь один шар окрашен во все три цвета, поэтому взятый шар имеет и красный цвет.
Т.о., допустив, что события B и C произошли, приходим к выводу, что событие A обязательно наступит. Следовательно, это событие достоверное и вероятность его равна единице.
Другими словами, условная вероятность $P_{BC}(A)=1$ события A не равна его безусловной вероятности $P(A)=1/2$. Итак, попарно независимые события A, B, C не являются независимыми в совокупности.

Вероятность совместного появления нескольких событий, независимых в совокупности, равна произведению вероятностей этих событий:

$$P(A_1A_2 \ldots A_n) = P(A_1)\cdot P(A_2)\cdot\ldots\cdot P(A_n).$$

Пример 4.
Найти вероятность совместного появления герба при одном бросании двух монет.
Решение:
вероятность появления герба первой монеты (событие A): $P(A)=1/2$.
Вероятность появления герба второй монеты (событие B): $P(B)=1/2$.
События A и B независимые, поэтому искомая вероятность по теореме умножения равна:

$$P(AB)=P(A)\cdot P(B)=1/2\cdot 1/2=1/4.$$

Случайные величины (дискретные и непрерывные) характеризуются своим законом распределения. Заметим, что это исчерпывающая характеристика в том смысле, что в законе распределения содержится вся информация о случайной величине. Никакой сколь угодно сложной математической обработкой наблюдаемых значений случайной величины о ней невозможно получить сведения, не содержащиеся в законе распределения. Однако этот закон часто неизвестен и о нем приходится судить на основе каких-то приближенных оценок. С другой стороны, для многих практических задач такая информация является избыточной: достаточно знать лишь некоторые количественные характеристики закона распределения.
Простейшей, но очень важной характеристикой является математическое ожидание.

Пусть, например, X - дискретная случайная величина распределена по закону:

X	x_1	x_2	…	x_n
P	p_1	p_2	…	p_n

Тогда ее *математическое ожидание $M(X)$* определяется равенством

$$M(X) = x_1\,p_1 + x_2\,p_2 + \ldots + x_n\,p_n.$$

Обратим внимание на то, что хотя конкретные значения величины X являются случайными, математическое ожидание $M(X)$ случайным не является.

Пусть, например, испытание состоит в бросании игрального кубика. Поскольку выпадение каждой грани равновозможно, Pi=1/6. Следовательно, математическое ожидание числа выпавших очков равно

$$M(X) = 1/6(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) = 21/6 = 3{,}5.$$

Число, близкое к этому, получится, если реально бросать кубик много раз и подсчитать сумму очков, деленную на число бросков.

Математическое ожидание и среднее арифметическое случайной величины - важные характеристики закона распределения, но, зная только их, мы имеем еще весьма одностороннее представление о нем. Не ясно, например, как велики могут быть отклонения значений величины от этих характеристик. Ведь одно и то же значение среднего арифметического наблюдаемых значений может получиться как в случае, когда все значения находятся вблизи среднего, так и в случае сколь угодно больших отклонений от него в сторону больших и меньших величин.

Для того чтобы характеризовать в среднем величины таких отклонений, вводится еще один важный параметр закона распределения, называемый дисперсией.

Дисперсией (рассеянием) дискретной случайной величины называют математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от ее математического ожидания:

$$D\{X) = M[X - M(X)]^2.$$

Так же дисперсию можно вычислить и по формуле:

$$D\{X) = M(X^2) - [M(X)]^2,$$

т. е. как разность математического ожидания квадрата значений случайной величины и квадрата её математического ожидания.

Дисперсия суммы двух независимых случайных величин равна сумме дисперсий этих величин:

$$D(X+Y) = D(X) + D(Y).$$

Многие случайные величины, встречающиеся на практике, имеют размерность. Например, величины, которые встречаются при различных измерениях. Тогда, если, скажем, случайная величина измеряется в метрах, то дисперсия будет иметь размерность м^2. Поэтому вводится еще одна характеристика, называемая *средним квадратическим отклонением*, обозначается: $\sigma = \sqrt{D(X)}$. ее размерность совпадает с размерностью случайной величины.

Пример 5.
Пусть X – число очков, выпадающих при одном бросании игральной кости. Найти дисперсию случайной величины X.
Решение:
случайная величина X – число очков принимает значения 1, 2, 3, 4, 5, 6. Составим закон её распределения:

X_i	1	2	3	4	5	6
P_i	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Тогда её математическое ожидание:

$$\text{M(X)}= 1\cdot\frac{1}{6}+2\cdot\frac{1}{6}+3\cdot\frac{1}{6}+4\cdot\frac{1}{6}+5\cdot\frac{1}{6}+6\cdot\frac{1}{6}=3{,}5.$$

Найдем отклонения для $x_1, x_2, \ldots, x_6$:

$$x_1^0=1-3{,}5;\ x_2^0=2-3{,}5;\ x_3^0=3-3{,}5;\ x_4^0=4-3{,}5;\ x_5^0=5-3{,}5;\ x_6^0=6-3{,}5.$$

Вычислим дисперсию:

$$D(X)=\frac{1}{6}((1-3{,}5)^2+(2-3{,}5)^2+(3-3{,}5)^2+(4-3{,}5)^2+(5-3{,}5)^2+(6-3{,}5)^2)=\frac{35}{12}.$$

Инструкция
1. Внимательно прочитайте задания и выполните их в приведенной последовательности согласно своему варианту.
2. Максимальное время выполнения задания – 80 мин.

Вариант 1
№1.
В группе 20 студентов, среди них 14 юношей. Найти вероятность того, что среди наудачу выбранных 6-ти студентов будут 3 девушки и 3 юноши.
№2.
Имеются 4 коробки с шарами.
1-я: 4 синих и 5 красных;
2-я: 5 синих и 4 красных;
3-я: 7 красных;
4-я: 12 синих.
Наудачу берут шар. Он красный. Найти вероятность того, что он из 2-й коробки.
№3
Двум студентам предложена задача. Вероятность того, что её решит 1-й студент равна 0,72, что решит 2-й – 0,65. Найти вероятность того, что задачу решат оба студента; что решит только один?

№4

Случайная величина X задана законом распределения:

X_i	2	3	10
p_i	0,1	0,4	0,5

Найти математическое ожидание M(X), дисперсию D(X) и среднее квадратичное отклонение σ(X).

Вариант 2

№1

Имеются 23 детали и среди них 19 стандартные. Случайным образом выбирают сразу 6. Какова вероятность, что среди выбранных ровно 5 стандартных?

№2

В цехе продукция производится на 3-х станках:

1-й станок 45% всей продукции, из них брак 5%;

2-й станок 35% всей продукции, из них брак 10%;

3-й станок 20% всей продукции, из них брак 2%.

Найти вероятность, что наудачу взятая деталь из всех произведенных стандартная. Какова вероятность, что она была произведена на 1-м станке?

№3

Два стрелка независимо друг от друга производят выстрел по мишени. Вероятность попадания 1-м -

0,8, 2-м – 0,9. Какова вероятность, что после одного выстрела в мишени будет только одна пробоина?

№4

Случайная величина X задана законом распределения:

X_i	0,1	2	10	20
p_i	0,4	0,2	0,15	0,25

Найти математическое ожидание M(X), дисперсию D(X) и среднее квадратичное отклонение σ(X).

Шкала оценки образовательных достижений

Процент результативности (правильных ответов)	Оценка уровня подготовки	
	балл (отметка)	вербальный аналог
90 ÷ 100	5	отлично
80 ÷ 89	4	хорошо
70 ÷ 79	3	удовлетворительно
менее 70	2	неудовлетворительно

Список литературы

Основная литература:

1. Алимов Ш.А., Колягин Ю.М., Ткачева М.В. и др. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Алгебра и начала математического анализа. 10-11 кл.: учебник. – М.: Изд-во "Просвещение", 2018
2. Кацман Ю.Я. Теория вероятностей и математическая статистика. Примеры с решениями: учебник. – М.: "Юрайт", 2017
3. Григорьев В.П. Математика (2-е изд. стер.): учебник. – М.: ИЦ «Академия», 2018
4. Пехлецкий И.Д. Математика: учебник. – М.: ИЦ «Академия», 2018
5. Баврин И.И. Математика для технических колледжей и техникумов: учебник и практикум для СПО. – 2-е изд., испр. и доп.. – М.: Юрайт, 2018
6. Баврин И.И. Математический анализ: учебник и практикум для СПО. – Юрайт, 2019
7. Богомолов Н.В., Самойленко П.И. Математика: учебник для СПО. – М.: Юрайт, 2018
8. Башмаков, М.И. Математика : учебник / Башмаков М.И. — Москва : КноРус, 2019. — 394 с. — (СПО). — ISBN 978-5-406-06554-9. — URL: https://book.ru/book/929528
9. Элькин В.Д. Математика и информатика: учебник и практикум для СПО. – М.: Юрайт, 2019. – 527 с. – (СПО)
10. Григорьев В.П. Математика: учебник для студ. *У*чреждений сред. *П*роф. *О*бразования/ В.П.Григорьев, Т.Н. Сабурова. – 2-е изд., стер. – М.: ИЦ «Академия», 2018. – 368 с. – ISBN 978-5-4468-7178-0. – Текст: электронный // ЭБС «Академия»: [сайт].URL:https://academia-moscow.ru/reader/?id=345524
11. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Алгебра и начала математического анализа.10-11кл.: учебник/ Ш.А. Алимов, Ю.М. Колягин, М.В.Ткачева и др. – М.- Просвещение, 2015. – 463с.: ил.
12. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Алгебра и начала математического анализа. 10-11кл.: учебник/ Ш.А.Алимов, Ю.М.Колягин, М.В.Ткачева и др. – М.- Просвещение, 2014– 463с.: ил.
13. Башмаков М.И. Математика: учебник для СПО. – М.: Издательский центр «Академия», 2015. – 256 с.
14. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Геометрия.10-11кл.: учебник/ Л.С. Атанасян, В.Ф. Бутузов, С.Б.Кадомцев и др. – М.- Просвещение, 2014. – 255 с.: ил.

Дополнительные источники:

1. Алпатов А.В. Математика [Электронный ресурс] : учебное пособие для СПО / А.В. Алпатов. — 2-е изд. — Электрон. текстовые данные. — Саратов: Профобразование, Ай Пи Эр Медиа, 2019. — 162 c. — 978-5-4486-0403-4, 978-5-4488-0215-7. — Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/80328.html - ЭБС «IPRbooks»

2. Богомолов Н.В. Практические занятия по математике в 2-х ч. Ч.1.: учебное пособие для СПО. – М.: Юрайт, 2018

3. Богомолов Н.В. Практические занятия по математике в 2-х ч. Ч.2.: учебное пособие для СПО. – М.: Юрайт, 2018

4. Алексеев Г.В. Высшая математика. Теория и практика (Электронный ресурс): учебное пособие для СПО/ Г.В. Алексеев, И.И. Холявин. – Электрон. текстовые данные. – Саратов: Профобразование, Ай Пи Эр Медиа, 2019. – 236 с. – 978-5-4486-0755-4, 978-5-4488-0253-9. Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/81274.html

5. Математика : учебное пособие / Н. Б. Карбачинская, Е. С. Лебедева, Е. Е. Харитонова, М. М. Чернецов ; под редакцией М. М. Чернецов. — Москва : Российский государственный университет правосудия, 2015. — 342 c. — ISBN 978-5-93916-481-8. — Текст : электронный // Электронно-библиотечная система IPR BOOKS : [сайт]. — URL: http://www.iprbookshop.ru/49604.html

6. Башмаков М.И. Математика: задачник: учебное пособие. - М.: Издательский центр "Академия", 2014. – 416 с.

7. Башмаков М.И. Математика: Сборник задач профильной направленности: Учеб. пособие. - М.: Издательский центр "Академия", 2014. – 208 с.